インドのベーダ数学における計算技術に関する研究

── 2桁の乗法技術の拡張と一般化 ──

小　口　祐　一

1．問題と目的

歴史的な視点からみると、インドは数学の発展に大きな寄与をした国であるといえる。たとえば、5世紀頃に零（ゼロ）を発見し、876年にその記号として「0」を初めて表記したことは、この国の大きな寄与の一つである（カジョリ, 1997, p.17）。また、12世紀頃にインドの数学者バースカラは、著書『リーラーバティー』において二次方程式の解の公式を定式化し、その解として負の数の存在を認めていた（カジョリ, 1997, p.141）。このように、インドは拡張の考えや一般化の考えを利用して、数学の優れた文化を構築してきた国であると考えられる。

応用数学の視点からみると、インドは世界の先端をいく科学技術を備えた国であるといえる。たとえば、IT産業では260万人以上のエンジニアを有し、80万人以上のソフトウェアの専門家が目覚しい速さで技術開発を推進している。これらの技術者によって支えられたIT産業をはじめとする各種産業の発展により、インドの経済成長率は他の国が及ばないものとなりつつある。国内総生産（GDP）の年平均成長率は、2003-2004年において8.50％であり、この数値はインドの経済成長の速さを裏付けるデータとなっている[1)]。このような科学技術の推進は、学校教育の充実がなくては成し得なかった成果と考えられる。

インドは、わが国と同様に12年間の学校教育期間を有し、進学する者には大学人文科学系3年間、工学・医学系4－5年間の高等教育が準備されている[2)]。その中で、小学校において2桁の乗法を暗算させている算数教育は、先進諸国に大きなインパクトを与えている（高橋, 2007, p.90）。この暗算のしかたについては、2桁の乗法が全部で8100通りあり、これらのすべてを暗記させているとは考えにくい。

それでは、この2桁の乗法を暗算させる技術には、どのようなものがあるのだろうか。筆者は、これまでインドの算数教科書を利用して2桁の乗法技術の内容を調査してきた。教科書においては、乗法の概念が面積図などを利用して解説され、乗法の手続きが筆算で解説されていた（NCERT, 2005)。しかし、暗算による2桁の乗法技術の手続きや概念について、インドの算数教科書から推測することは困難であった。インド数学の計算技術は秘伝として代々受け継がれてきており、まとまった記述として記されているものは数少ない。そのような状況において、古代インドの聖典ベーダから導かれた計算技術を調査した先行研究がある（Bharati, 1992)。この聖典ベーダから導かれた秘伝ともいえる計算技術は、一般にベーダ数学（Vedic Mathematics）と呼ばれている。ベーダ数学は、計算技術の条件と手続きが明確化されており、主に速く計算するための技術として利用されている。しかし、多くの計算技術において概念が解説されていないため、拡張の考えや一般化の考えを利用して、子どもに数学の概念を形成させたり、子どもの数のセンスを伸ばしたりするための教材として利用するならば、この計算技術の概念を明確化する必要がある。面積図や式の変形を利用して計算技術の概念を明確化することにより、子どもに計算手続きの妥当性を立証させることや、計算技術を一般化させて、より適用範囲が広い数学の概念を形成させることが可能になる。また、子どもに補数の有用性を感得させ、数を合成・分解して数を多様な視点からとらえるセンスを伸ばすことが可能になる。本研究は、ベー

ダ数学に着目し、インド数学における２桁の乗法技術の概念を分析する。分析する内容として、まず、面積図と式の変形を利用して、この乗法技術の概念を明確化する。次に、この乗法技術は、ある条件を満たす範囲で適用できる特殊な技術なのか、あるいは、２桁のすべての乗法に適用できる一般化された技術なのかを数学的に明らかにしていく。

本研究の目的は、「インドのベーダ数学（Vedic Mathematics）における２桁の乗法技術を拡張し、２桁のすべての乗法に適用できる技術として一般化できるか」という問いに答えることである。

２．方法

（１） ２桁の乗法技術の条件、手続きと概念を明確化する。

２桁の乗法技術の手続きについて、１つの計算を１つのステップとし、答えを導くまでの計算の順序に沿って、それぞれのステップを言葉と式で明確化する。また、２桁の乗法技術の概念について、面積図や式の変形によって明確化する。

（２） ２桁の乗法技術の条件を緩和し、適用範囲を拡張する。

ある特定の条件を満たす乗法技術について、より広い範囲に適用できるようにするために、その条件を緩和しても手続きや概念が説明可能かどうかを、ステップの修正および面積図や式の変形によって考察する。

（３） ２桁の乗法技術の条件を一般化し、適用範囲を２桁のすべての乗法に拡げる。

より広い範囲に適用できた乗法技術が、２桁のすべての乗法に適用できるかについて考察する。その際、条件の緩和によって一般化できる乗法技術は「拡張による一般化」を利用し、条件の追加によって一般化できる乗法技術は「補完による一般化」を利用する。

① 拡張による一般化

ある特定の条件を満たす乗法技術について、すべての範囲に適用できるようにするために、その条件を「任意の２数である」と一般化しても手続きや概念が説明可能かどうかを、ステップの修正および面積図や式の変形によって考察する。ただし、本研究で考察するすべての範囲とは、２桁のすべての乗法である。

② 補完による一般化

ある特定の条件を満たす乗法技術について、すべての範囲に適用できるようにするために、その条件を補完する別の条件を追加して、追加された条件を満たす乗法技術の手続きや概念が説明可能かどうかを、ステップの構成および面積図や式の変形によって考察する。ただし、ある特定の条件を満たす範囲と追加された条件を満たす範囲を合わせると、２桁のすべての乗法になるようにする。

３．２桁の乗法技術の拡張

（１） ２桁の乗法表

表１．２桁の乗法表

被乗数＼乗数	10〜19	20〜29	30〜39	40〜49	50〜59	60〜69	70〜79	80〜89	90〜99
10〜19	T11	T12	T13	T14	T15	T16	T17	T18	T19
20〜29	T21	T22	T23	T24	T25	T26	T27	T28	T29
30〜39	T31	T32	T33	T34	T35	T36	T37	T38	T39
40〜49	T41	T42	T43	T44	T45	T46	T47	T48	T49
50〜59	T51	T52	T53	T54	T55	T56	T57	T58	T59
60〜69	T61	T62	T63	T64	T65	T66	T67	T68	T69
70〜79	T71	T72	T73	T74	T75	T76	T77	T78	T79
80〜89	T81	T82	T83	T84	T85	T86	T87	T88	T89
90〜99	T91	T92	T93	T94	T95	T96	T97	T98	T99

上記のように、２桁の乗法表を作成した。たとえば、T11のセルには10×10から19×19までの100通りの乗法が含まれることを意味している。２桁の乗法表全体で、10×10から99×99までの8100通りの乗法が含まれる。太枠で囲まれた９個のセルは、被乗数の範囲と乗数の範囲が等しいセルである。これら太枠で囲まれた９個のセルの左側にある36個のセルに含まれる3600通りの乗法は、乗法の交換法則によって、右側

にある36個のセルに含まれる3600通りの乗法と１対１対応させせることができる。すなわち、太枠で囲まれた９個のセルの右側にある36個のセルに含まれる3600通りの乗法に対して適用できる乗法技術は、乗法の交換法則を利用すれば、左側にある36個のセルに含まれる3600通りの乗法に対しても適用できる。

本研究では、２桁の乗法技術の条件を緩和し、適用範囲を太枠で囲まれた９個のセル内のすべての乗法まで拡張する。そして、２桁の乗法技術の条件を一般化し、太枠で囲まれた９個のセルの右側にある36個のセルに含まれる3600通りの乗法に対して適用できることについて詳述する。これらのことを通して、乗法技術の適用範囲を２桁のすべての乗法まで一般化していく。

（2）　十の位の数が同じであり、一の位の数が５

①　T22の乗法表における位置づけ

表２．T22の乗法表

乗数／被乗数	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
20の段										
21の段										
22の段										
23の段										
24の段										
25の段						1-1				
26の段				1-4	1-2	1-3				
27の段										
28の段										
29の段										

ベーダ数学において、「左側の数が同じで、右側の数が５であること」という前提条件を満たすときに利用できる乗法技術が紹介されている。そして、この乗法技術の前提条件を「左側の数が同じで、右側の数の合計が10であること」に拡張して、その手続きが説明されている（Kumar, 2004, p.7-18）。この節では、この乗法技術の概念について、ある特定の条件を満たす２桁の乗法の範囲で明確化する。さらに、この乗法技術の条件を緩和して、その手続きと概念を示していく。

T22の乗法表において、第１に、被乗数が25の段で乗数が25である場合に適用できる【条件１－１】を満たす乗法技術について述べる。第２に、太枠で囲まれた９通りの乗法に対して適用できる【拡張１－２】を満たす乗法技術について述べる。第３に、太枠で囲まれた９個のセルの右側にある36通りの乗法に対して適用できる【拡張１－３】を満たす乗法技術について述べる。最後に、太枠で囲まれた９個のセルの左側にある55通りの乗法に対して適用できる【拡張１－４】を満たす乗法技術について述べる。このことにより、T22の乗法表に含まれる100通りの乗法に適用できる乗法技術が明確化されることになる。この節で述べる【拡張１－２】、【拡張１－３】または【拡張１－４】を満たす乗法技術は、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）において、太枠で囲まれた９個のセル内のすべての乗法まで適用範囲を拡張することができる。

②　【条件１－１】十の位の数が同じであり、一の位の数が５である

〈例１－１〉　25×25

Ａ：計算の手続き

ⅰ）被乗数の一の位の５と乗数の一の位の５をかけて書く。

$5 \times 5 = 25$

ⅱ）乗数の十の位の数に１をたす。

$2 + 1 = 3$

ⅲ）被乗数の十の位の数とⅱ）で求めた数をかける。

$2 \times 3 = 6$

ⅳ）ⅲ）で求めた数をⅰ）で求めた数の左側に書く。

625

Ｂ：計算の概念

25×25の正方形を、20×20と5×5の２つの正方形と20×5と5×20の２つの長方形に分割する。そして、20×20の正方形の右側に、20×5と5×20の２つの長方形を合併する。できあがった長方形の面積に残った5×5の正方形の面積をたすと、元の正方形と同じ面積になるという考えを

利用している（図１－１）。

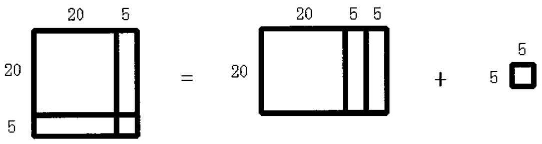

図１－１．25×25の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$25\times25=(20+5)\times(20+5)$

$=20\times20+20\times5+5\times20+\boxed{5\times5}$　（Ａｉ）

$=20\times(\boxed{20+5+5})+5\times5$　（Ａⅱ）

$=20\times30+25$

$=\boxed{2\times3}\times100+25$　（Ａⅲ）

$=6\times100+25$

$=\boxed{625}$　（Ａⅳ）

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$(10m+5)\times(10m+5)$

$=10m\times10m+10m\times5$

$+5\times10m+5\times5$

$=10m\times(10m+5+5)+5\times5$

$=10m\times10(m+1)+25$

$=m\times(m+1)\times100+25$

③　【拡張１－２】十の位の数が同じであり、一の位の数の和が10である

〈例１－２〉　26×24

Ａ：計算の手続き

ｉ）被乗数の一の位の６と乗数の一の位の４をかけて書く。

$6\times4=24$

ⅱ）乗数の十の位の数に１をたす。

$2+1=3$

ⅲ）被乗数の十の位の数とⅱ）で求めた数をかける。

$2\times3=6$

ⅳ）ⅲ）で求めた数をｉ）で求めた数の左側に書く。

624

Ｂ：計算の概念

26×24の長方形を、20×20の正方形と20×4、6×20と6×4の３つの長方形に分割する。そして、20×20の正方形の右側に、20×4と6×20の２つの長方形を合併する。できあがった長方形の面積に残った6×4の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図１－２）。

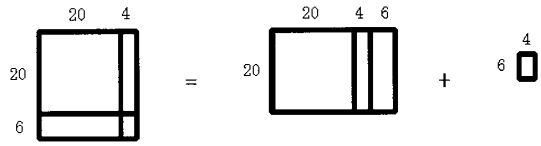

図１－２．26×24の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$26\times24=(20+6)\times(20+4)$

$=20\times20+20\times4+6\times20+\boxed{6\times4}$　（Ａｉ）

$=20\times(\boxed{20+4+6})+6\times4$　（Ａⅱ）

$=20\times30+24$

$=\boxed{2\times3}\times100+24$　（Ａⅲ）

$=6\times100+24$

$=\boxed{624}$　（Ａⅳ）

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$(10m+a)\times\{10m+(10-a)\}$

$=10m\times10m+10m\times(10-a)$

$+a\times10m+a\times(10-a)$

$=10m\times\{10m+(10-a)+a\}$

$+a\times(10-a)$

$=10m\times10(m+1)+a\times(10-a)$

$=m\times(m+1)\times100+a\times(10-a)$

④　【拡張１－３】十の位の数が同じであり、一の位の数の和が10より大きい

〈例１－３〉　26×25

Ａ：計算の手続き

ｉ）乗数の25を24と１の和に分解する。

$25=24+1$

ⅱ）〈例１－２〉の手続きを利用して26と24

をかける。

$26 \times 24 = 624$

iii）被乗数の26と１をかける。

$26 \times 1 = 26$

iv）ii）で求めた数とiii）で求めた数をたして書く。

$624 + 26 = 650$

Ｂ：計算の概念

26×25の長方形を、26×24と26×1の２つの長方形に分割する。そして、26×24の長方形の面積を〈例１－２〉の手続きを利用して求める。この面積に残った26×1の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図１－３）。

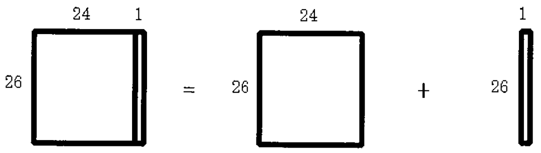

図１－３．26×25の面積図

数の分解と式の展開を利用して、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$$
\begin{aligned}
26 \times 25 &= 26 \times (\boxed{24+1}) && (\text{A i}) \\
&= \boxed{26 \times 24} + \boxed{26 \times 1} && (\text{A ii})(\text{A iii}) \\
&= \boxed{624 + 26} && (\text{A iv}) \\
&= 650
\end{aligned}
$$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&(10m + a) \times \{10m + (10 - a) + b\} \\
&\quad = 10m \times 10m + 10m \times (10 - a) \\
&\qquad + a \times 10m + a \times (10 - a) \\
&\qquad + (10m + a) \times b \\
&\quad = 10m \times \{10m + (10 - a) + a\} \\
&\qquad + a \times (10 - a) + (10m + a) \times b \\
&\quad = 10m \times 10(m + 1) + a \times (10 - a) \\
&\qquad + (10m + a) \times b \\
&\quad = m \times (m + 1) \times 100 + a \times (10 - a) \\
&\qquad + (10m + a) \times b
\end{aligned}
$$

⑤ **【拡張１－４】十の位の数が同じであり、一の位の数の和が10より小さい**

〈例１－４〉 26×23

Ａ：計算の手続き

i）乗数の23を24と１の差に分解する。

$23 = 24 - 1$

ii）〈例１－２〉の手続きを利用して26と24をかける。

$26 \times 24 = 624$

iii）被乗数の26と１をかける。

$26 \times 1 = 26$

iv）ii）で求めた数からiii）で求めた数をひいて書く。

$624 - 26 = 598$

Ｂ：計算の概念

26×23の長方形と26×1を合併して、26×24の長方形を構成する。そして、26×24の長方形の面積を〈例１－２〉の手続きを利用して求める。この面積から合併した26×1の長方形の面積をひくと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図１－４）。

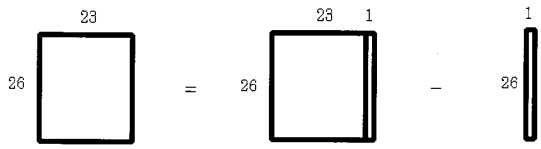

図１－４．26×23の面積図

数の分解と式の展開を利用して、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$$
\begin{aligned}
26 \times 23 &= 26 \times (\boxed{24-1}) && (\text{A i}) \\
&= \boxed{26 \times 24} - \boxed{26 \times 1} && (\text{A ii})(\text{A iii}) \\
&= \boxed{624 - 26} && (\text{A iv}) \\
&= 598
\end{aligned}
$$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&(10m + a) \times \{10m + (10 - a) - b\} \\
&\quad = 10m \times 10m + 10m \times (10 - a) \\
&\qquad + a \times 10m + a \times (10 - a) \\
&\qquad - (10m + a) \times b
\end{aligned}
$$

$$= 10m \times \{10m + (10 - a) + a\} + a \times (10 - a) - (10m + a) \times b$$
$$= 10m \times 10(m + 1) + a \times (10 - a) - (10m + a) \times b$$
$$= m \times (m + 1) \times 100 + a \times (10 - a) - (10m + a) \times b$$

T22の乗法表において、【拡張１－２】を満たす乗法技術は、太枠で囲まれた９通りの乗法に対して適用できる。【拡張１－３】を満たす乗法技術は、太枠で囲まれた９個のセルの右側にある36通りの乗法に対して適用できる。【拡張１－４】を満たす乗法技術は、太枠で囲まれた９個のセルの左側にある55通りの乗法に対して適用できる。このことにより、【条件１－１】を満たす乗法技術は、T22の乗法表に含まれる100通りの乗法に適用できる乗法技術として拡張された。

２桁の乗法において十の位の数が同じならば、【拡張１－２】、【拡張１－３】または【拡張１－４】を満たす乗法技術を利用して計算できる。たとえば、32×38ならば2×8=16、3+1=4、3×4=12、1216という４つの手続きで答えを導くことができる。33×38ならば33=32+1、32×38=1216、1×38=38、1216+38=1254という４つの手続きで答えを導くことができる。31×38ならば31=32－1、32×38=1216、1×38=38、1216－38=1178という４つの手続きで答えを導くことができる。さらに、２つの数の百の位と十の位の数が同じならば、同様の手続きで答えを導くことができ、この乗法技術を３桁の乗法にも適用できることがわかる（Kumar, 2004, p.7-18)。116×114ならば【拡張１－２】を満たす乗法技術を利用して、まず６と４をかけて24になる。そして乗数の11に１をたして12になり、11とこの12をかけて132になる。これらの手続きから13224を求めればよいのである。

このことから、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）において、【拡張１－２】、【拡張１－３】または【拡張１－４】を満たす乗法技術は、太枠で囲まれた９個のセル内のすべての乗法まで適用範囲を拡張することができる。すなわち、【条件１－１】を満たす乗法技術は、【拡張１－２】、【拡張１－３】または【拡張１－４】の条件で場合分けすることにより、２桁の乗法表の太枠で囲まれた９個のセル内に含まれる900通りの乗法に適用できる乗法技術として拡張された。

（３） 十の位の数が１

① ２桁の乗法表における位置づけ

表３．２桁の乗法表における例（１）

被乗数＼乗数	10～19	20～29	30～39	40～49	50～59	60～69	70～79	80～89	90～99
10～19	2-1								
20～29		2-2							
30～39									
40～49									
50～59									
60～69									
70～79									
80～89									
90～99									

わが国のインド式計算の解説書において、「２つの数が11～19までであること」という前提条件を満たすときに利用できる乗法技術が紹介されている。そして、この乗法技術の前提条件を「２つの数の十の位の数が同じであること」に拡張して、その手続きと概念が説明されている（中村, 2007, p.44-47)。この節では、この乗法技術の概念について、ある特定の条件を満たす２桁の乗法の範囲で明確化する。

２桁の乗法表（表３）において、まず、被乗数と乗数の十の位の数が１である場合に適用できる【条件２－１】を満たす乗法技術について述べる。次に、太枠で囲まれた９個のセル内のすべての乗法に対して適用できる【拡張２－２】を満たす乗法技術について述べる。このことにより、この乗法技術も、２桁の乗法表の太枠で囲まれた９個のセル内に含まれる900通りの乗法に適用できる乗法技術として明確化されることになる。

② 【条件２－１】十の位の数が１である

〈例２－１〉 16×15

A：計算の手続き

ⅰ）被乗数の16と乗数の一の位の５をたす。

$16+5=21$

ⅱ）ⅰ）で求めた数に10をかける。

$21\times 10=210$

ⅲ）被乗数の一の位の６と乗数の一の位の５をかける。

$6\times 5=30$

ⅳ）ⅱ）で求めた数とⅲ）で求めた数をたして書く。

$210+30=240$

B：計算の概念

16×15の長方形を、10×10の正方形と10×5、6×10と6×5の３つの長方形に分割する。そして、10×10の正方形の下側に、６×10と10×5の２つの長方形を合併する。できあがった長方形の面積に残った6×5の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図２－１）。

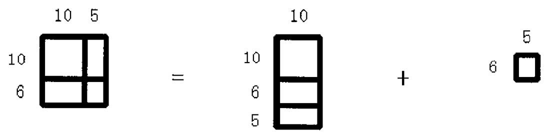

図２－１．16×15の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$$\begin{aligned}16\times 15&=(10+6)\times(10+5)\\&=10\times 10+6\times 10+10\times 5+\boxed{6\times 5}\quad(\text{A iii})\\&=(10+6+5)\times 10+6\times 5\\&=(\boxed{16+5})\times 10+6\times 5\quad(\text{A i})\\&=\boxed{21\times 10}+30\quad(\text{A ii})\\&=\boxed{210+30}\quad(\text{A iv})\\&=240\end{aligned}$$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$$\begin{aligned}&(10+a)\times(10+b)\\&=10\times 10+a\times 10+10\times b+a\times b\\&=(10+a+b)\times 10+a\times b\end{aligned}$$

③　**【拡張２－２】十の位の数が同じである**

〈例２－２〉　26×25

A：計算の手続き

ⅰ）被乗数の26と乗数の一の位の５をたす。

$26+5=31$

ⅱ）ⅰ）で求めた数に20をかける。

$31\times 20=620$

ⅲ）被乗数の一の位の６と乗数の一の位の５をかける。

$6\times 5=30$

ⅳ）ⅱ）で求めた数とⅲ）で求めた数をたして書く。

$620+30=650$

B：計算の概念

26×25の長方形を、20×20の正方形と20×5、6×20と6×5の３つの長方形に分割する。そして、20×20の正方形の下側に、6×20と20×5の２つの長方形を合併する。できあがった長方形の面積に残った6×5の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図２－２）。

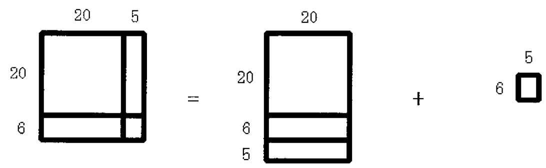

図２－２．26×25の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$$\begin{aligned}26\times 25&=(20+6)\times(20+5)\\&=20\times 20+6\times 20+20\times 5+\boxed{6\times 5}\quad(\text{A iii})\\&=(20+6+5)\times 20+6\times 5\\&=(\boxed{26+5})\times 20+6\times 5\quad(\text{A i})\\&=\boxed{31\times 20}+30\quad(\text{A ii})\\&=\boxed{620+30}\quad(\text{A iv})\\&=650\end{aligned}$$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$(10m+a)\times(10m+b)$

$$= 10m \times 10m + a \times 10m + 10m \times b + a \times b$$
$$= (10m + a + b) \times 10m + a \times b$$

２桁の乗法において十の位の数が同じならば、【拡張２－２】を満たす乗法技術を利用して計算できる。たとえば、32×38ならば32＋8＝40、40×30＝1200、2×8＝16、1200＋16＝1216という４つの手続きで答えを導くことができる。

このことから、２桁の乗法表（表３）において、【拡張２－２】を満たす乗法技術は、太枠で囲まれた９個のセル内のすべての乗法まで適用範囲を拡張することができる。すなわち、【条件２－１】を満たす乗法技術は、２桁の乗法表の太枠で囲まれた９個のセル内に含まれる900通りの乗法に適用できる乗法技術として拡張された。

（4） 基準数より小さい２数

① ２桁の乗法表における位置づけ

表４．２桁の乗法表における例（２）

被乗数＼乗数	10～19	20～29	30～39	40～49	50～59	60～69	70～79	80～89	90～99
10～19	3-1								
20～29		3-2							
30～39									
40～49									
50～59									
60～69									
70～79									
80～89									
90～99									

ベーダ数学において、「基準数より小さい２数であること」という前提条件を満たすときに利用できる乗法技術が紹介されている。基準数とは、かけられる数やかける数との差を求めるための基にする数のことであり、一般に10の倍数が使われる。そして、この乗法技術の前提条件を「基準数より大きい２数であること」に拡張して、その手続きが説明されている。この乗法技術は「ニキラム規則（Nikhilam Sutra）」と呼ばれている。この規則は、ベーダから「Nikhilam Navatascaramam Dasatah」という一文を読み、その意味を解釈すると「すべては９から最後は10から（All from 9 and the last from 10）」になるという（Bharati, 1992, p.11-32）。すなわち、この一文は９の補数と10の補数の重要性を指摘している。この節では、この乗法技術の概念について、ある特定の条件を満たす２桁の乗法の範囲で明確化する。さらに、この乗法技術の条件を緩和して、その手続きと概念を示していく。

２桁の乗法表（表４）において、まず、被乗数と乗数が基準数より小さい２数である場合に適用できる【条件３－１】を満たす乗法技術について述べる。次に、被乗数と乗数が基準数より大きい２数である場合に適用できる【拡張３－２】を満たす乗法技術について述べる。このことにより、この乗法技術も、２桁の乗法表の太枠で囲まれた９個のセル内に含まれる900通りの乗法に適用できる乗法技術として明確化されることになる。

② 【条件３－１】基準数より小さい２数である

〈例３－１〉 17×19

A：計算の手続き

ｉ）被乗数17から基準数20をひく。
$17 - 20 = -3$

ii）乗数19から基準数20をひく。
$19 - 20 = -1$

iii）被乗数の17とii）で求めた数をたして基準数20をかける。
$(17 - 1) \times 20 = 16 \times 20 = 320$

iv）ｉ）で求めた数とii）で求めた数をかける。
$(-3) \times (-1) = 3$

ｖ）iii）で求めた数とiv）で求めた数をたして書く。
$320 + 3 = 323$

B：計算の概念

17×19の長方形を、16×19、1×16と1×3の３つの長方形に分割する。そして、16×19の長方形の右側に、1×16の長方形を合併する。できあがった長方形の面積に残った1×3の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図３－１）。

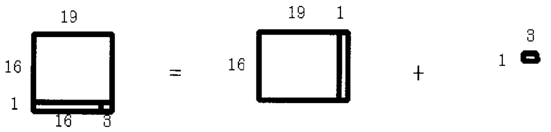

図３－１．17×19の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$17\times19=(\boxed{20-3})\times(\boxed{20-1})$　　(A i)(A ii)

$=20\times20-3\times20-1\times20$

$+\boxed{(-1)\times(-3)}$　　(A iv)

$=(20-3-1)\times20+(-1)\times(-3)$

$=\boxed{(17-1)\times20}+(-1)\times(-3)$　　(A iii)

$=16\times20+3$

$=\boxed{320+3}$　　(A v)

$=323$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。xは基準数を表す。

$(x-a)\times(x-b)$

$=x\times x-a\times x-b\times x+(-a)\times(-b)$

$=(x-a-b)\times x+a\times b$

③ **【拡張３－２】基準数より大きい２数である**

〈例３－２〉 21×23

A：計算の手続き

i）被乗数21から基準数20をひく。

$21-20=1$

ii）乗数23から基準数20をひく。

$23-20=3$

iii）被乗数の21とii）で求めた数をたして基準数20をかける。

$(21+3)\times20=24\times20=480$

iv）i）で求めた数とii）で求めた数をかける。

$1\times3=3$

v）iii）で求めた数とiv）で求めた数をたして書く。

$480+3=483$

B：計算の概念

21×23の長方形を、20×20の正方形と20×3、1×20と1×3の３つの長方形に分割する。そして、20×20の正方形の下側に、1×20と20×3の２つの長方形を合併する。できあがった長方形の面積に残った1×3の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図３－２）。

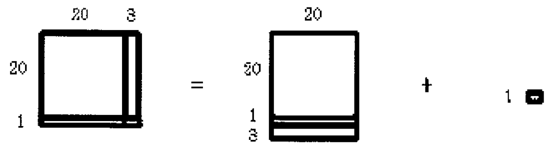

図３－２．21×23の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$21\times23=(\boxed{20+1})\times(\boxed{20+3})$　　(A i)(A ii)

$=20\times20+1\times20+20\times3+\boxed{1\times3}$ (A iv)

$=(20+1+3)\times20+1\times3$

$=\boxed{(21+3)\times20}+1\times3$　　(A iii)

$=24\times20+3$

$=\boxed{480+3}$　　(A v)

$=483$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。xは基準数を表す。

$(x+a)\times(x+b)$

$=x\times x+a\times x+b\times x+a\times b$

$=(x+a+b)\times x+a\times b$

２桁の乗法において基準数より小さい２数または基準数より大きい２数ならば、【条件３－１】または【拡張３－２】を満たす乗法技術を利用して計算できる。たとえば、38×37ならば38－40＝－2、37－40＝－3、(38－3)×40＝35×40＝1400、(－2)×(－3)＝6、1400＋6＝1406という５つの手続きで答えを導くことができる。32×34ならば32－30＝2、34－30＝4、(32＋4)×30＝36×30＝1080、2×4＝8、1080＋8＝1088という５つの手続きで答えを導くことができる。さらに、基準数が100ならば第３の手続きによる計算の答えで一の位の数と十の位の数が０になるため、次のような４つの手続きで答えを導くことができ、

この乗法技術を３桁の乗法にも適用できることがわかる（Bharati, 1992, p.14-16)。98×97ならば98と100との差が－２で97と100との差が－３であり、斜めに98と－３をたして、垂直に－２と－３をかければよい。また、104×103ならば104と100との差が＋４で103と100との差が＋３であり、斜めに104と＋３をたして、垂直に＋４と＋３をかければよいのである。

	98	－２
×	97	－３
	95／06	

	104	＋４
×	103	＋３
	107／12	

このことから、２桁の乗法表（表４）において、【条件３－１】または【拡張３－２】を満たす乗法技術は、太枠で囲まれた９個のセル内のすべての乗法まで適用範囲を拡張することができる。すなわち、【条件３－１】を満たす乗法技術は、【条件３－１】または【拡張３－２】の条件で場合分けすることにより、２桁の乗法表の太枠で囲まれた９個のセル内に含まれる900通りの乗法に適用できる乗法技術として拡張された。

（５） ５の倍数と２の倍数

① T33の乗法表における位置づけ

表５．T33の乗法表

被乗数＼乗数	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30の段										
31の段										
32の段										
33の段										
34の段										
35の段							4-1	4-2		
36の段										
37の段										
38の段										
39の段										

わが国のインド式計算の解説書において、「被乗数が偶数で乗数の一の位の数が５であること」という前提条件を満たすときに利用できる乗法技術が紹介されている。そして、この乗法技術の前提条件を「被乗数が４の倍数で乗数の一の位の数が５であること」に特殊化して、その手続きと概念が説明されている（中村, 2007, p.38-43)。この節では、この乗法技術の概念について、ある特定の条件を満たす２桁の乗法の範囲で明確化する。さらに、この乗法技術の条件を緩和して、その手続きと概念を示していく。ただし、本研究では乗数の条件を緩和して乗法技術の適用範囲を拡張する方針で説明するために、上述した前提条件については、乗法の交換法則を利用して「被乗数が５の倍数で乗数が２の倍数である」に修正した【条件４－１】として考察する。

T33の乗法表において、まず、被乗数が５の倍数で乗数が２の倍数である場合に適用できる【条件４－１】を満たす乗法技術について述べる。次に、太枠で囲まれた36通りの乗法に対して適用できる【拡張４－２】を満たす乗法技術について述べる。この節で述べる【拡張４－２】を満たす乗法技術は、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）において、被乗数または乗数に５の倍数を含む2916通りの乗法まで適用範囲を拡張することができる。

② 【条件４－１】５の倍数と２の倍数である

〈例４－１〉 35×36

A：計算の手続き

ⅰ）乗数の36を２と18の積に分解する。
　36＝2×18

ⅱ）被乗数の35とⅰ）で求めた２をかける。
　35×2＝70

ⅲ）ⅱ）で求めた数とⅰ）で求めた18をかけて書く。
　70×18＝1260

B：計算の概念

35×36の長方形を、35×18と35×18の２つの長方形に分割する。そして、35×18の長方形の下側に、もう一つの35×18の長方形を合併する。できあがった長方形の縦の長さは35×2＝70（10の倍数）であり、この縦の長さと横の長さの18をかけた長方形の面積は、元の長方形と同じ面

積になるという考えを利用している（図４－１）。

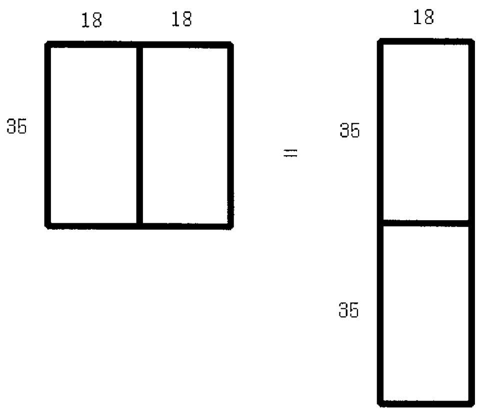

図４－１．35×36の面積図

数の分解と乗法の結合法則を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$35\times36=35\times(\boxed{2\times18})$　（Ａｉ）

$=(\boxed{35\times2})\times18$　（Ａⅱ）

$=\boxed{70\times18}$　（Ａⅲ）

$=1260$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$5m\times(2\times n)$

$=(5m\times2)\times n$

$=10m\times n$

③　【拡張４－２】５の倍数と任意の数である

〈例４－２〉　35×37

Ａ：計算の手続き

ⅰ）乗数の37を２と（37÷2）の積に分解する。

$37=2\times(37\div2)$

ⅱ）被乗数の35とⅰ）で求めた２をかける。

$35\times2=70$

ⅲ）ⅱ）で求めた数と乗数の37をかける。

$70\times37=2590$

ⅳ）ⅲ）で求めた数を２でわって書く。

$2590\div2=1295$

Ｂ：計算の概念

35×37の長方形を、35×（37÷2）と35×（37÷2）の２つの長方形に分割する。そして、35×37の長方形の下側に、もう一つ35×37の長方形を合併する。できあがった長方形の縦の長さは35×2=70（10の倍数）であり、この縦の長さと横の長さの37をかけた長方形の面積は、元の長方形の２倍の面積になるため（倍積変形）、２でわると元の長方形と同じ面積（黒網部分）になるという考えを利用している（図４－２）。

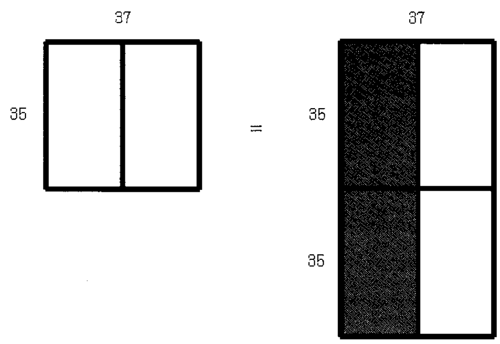

図４－２．35×37の面積図

数の分解と乗法の結合法則を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$35\times37=35\times\{\boxed{2\times(37\div2)}\}$　（Ａｉ）

$=(\boxed{35\times2})\times37\div2$　（Ａⅱ）

$=\boxed{70\times37}\div2$　（Ａⅲ）

$=\boxed{2590\div2}$　（Ａⅳ）

$=1295$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$5m\times\{2\times(n\div2)\}$

$=(5m\times2)\times n\div2$

$=10m\times n\div2$

T33の乗法表において、【拡張４－２】を満たす乗法技術は、太枠で囲まれた36通りの乗法に対して適用できる。しかし、この乗法技術は、太枠で囲まれていない64通りの乗法に対して適用できない。このことにより、【条件４－１】を満たす乗法技術は、T33の乗法表に含まれる36通りの乗法に適用できる乗法技術として拡張された。

２桁の乗法において被乗数または乗数が５の

倍数ならば、【拡張４－２】を満たす乗法技術を利用して計算できる。たとえば、45×72ならば72＝2×36、45×2＝90、90×36＝3240という３つの手続きで答えを導くことができる。45×73ならば73＝2×(73÷2)、45×2＝90、90×73＝6570、6570÷2＝3285という４つの手続きで答えを導くことができる。

このことから、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）において、【拡張４－２】を満たす乗法技術は、各セル内において被乗数または乗数に５の倍数を含む36通りずつの乗法まで適用範囲を拡張することができる。すなわち、【条件４－１】を満たす乗法技術は、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）の81個のセルにおいて、被乗数または乗数に５の倍数を含む36×81＝2916通りの乗法に適用できる乗法技術として拡張された。

４．２桁の乗法技術の一般化

（１） 一般化の意義

数学は一般化することを考えながら作り上げていくものであり、このことによって、類似の問題に遭遇したとき、それを容易に解決できるようになる。ある特定の対象において成り立つ概念を、この対象を含む集合全体で成り立つ概念としていくことを一般化という。たとえば、乗法九九の３の段を作るとき、3×2＝3＋3＝6、3×3＝3＋3＋3＝9として作っていく。このように、同数累加の考えを利用して乗法九九の３の段を作ろうとするのであるが、3×7や3×8などは同じ加法を繰り返すことが大変になってくる。そこで、式を3×(a＋1)＝3×a＋3と一般化する意義が見出されるのである。仮に、乗法九九の３の段を3×6＝18まで求めたならば、3×7は3×7＝3×6＋3として求めることができるのである（片桐, p.178-181）。ここでは、ある特定の条件を満たす乗法技術を、その条件を含むすべての範囲で成り立つ乗法技術としていく。ただし、本研究で考察するすべての範囲とは、２桁のすべての乗法である。

（２） 【条件１－１】の一般化

３（２）では、２桁の乗法において十の位の数が同じならば、【拡張１－２】、【拡張１－３】または【拡張１－４】を満たす乗法技術を利用して計算できることを示した。この節では、「十の位の数が同じである」という条件を拡張し、この乗法技術の手続きと概念を【一般化５－１】として一般化する。

【一般化５－１】任意の２数である

〈例５－１〉 26×35

Ａ：計算の手続き

ｉ）乗数の35を24と10と１の和に分解する。

35＝24＋10＋1

ⅱ）〈例１－２〉の手続きを利用して26と24をかける。

26×24＝624

ⅲ）被乗数の26と10をかける。

26×10＝260

ⅳ）被乗数の26と１をかける。

26×1＝26

ｖ）ⅱ）、ⅲ）、ⅳ）で求めた数をたして書く。

624＋260＋26＝910

Ｂ：計算の概念

26×35の長方形を、26×24、26×10と26×1の３つの長方形に分割する。そして、26×24の長方形の面積を〈例１－２〉の手続きを利用して求める。この面積に残った26×10と26×1の２つの長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図５－１）。

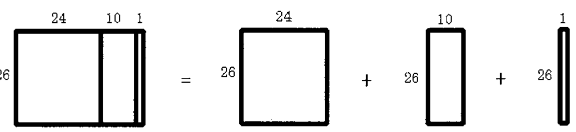

図５－１．26×35の面積図

数の分解と式の展開を利用して、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$$
\begin{aligned}
26\times35 &= 26\times(\boxed{24+10+1}) && (\mathrm{A\,i})\\
&= \boxed{26\times24}+\boxed{26\times10}+\boxed{26\times1} && \\
& && (\mathrm{A\,ii})(\mathrm{A\,iii})(\mathrm{A\,iv})\\
&= \boxed{624+260+26} && (\mathrm{A\,v})\\
&= 910
\end{aligned}
$$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$(10m+a)\times\{10m+(10-a)+10b+c\}$
$=10m\times10m+10m\times(10-a)+a\times10m+a\times(10-a)+(10m+a)\times10b+(10m+a)\times c$
$=10m\times\{10m+(10-a)+a\}+a\times(10-a)+(10m+a)\times10b+(10m+a)\times c$
$=10m\times10(m+1)+a\times(10-a)+(10m+a)\times10b+(10m+a)\times c$
$=m\times(m+1)\times100+a\times(10-a)+(10m+a)\times10b+(10m+a)\times c$

十の位の数が異なり、一の位の数の和が10より大きい場合には、〈例５－１〉のような手続きと概念として一般化できる。また、十の位の数が異なり、一の位の数の和が10より小さい場合には、次のような手続きと概念として一般化できる。26×33ならば33＝24＋10－1、26×24＝624、26×10＝260、26×1＝26、624＋260－26＝858という５つの手続きとして一般化できる。そして、【拡張１－４】を満たす乗法技術の説明で利用した「元の長方形を２つの長方形に分割する考え」を、「元の長方形を任意の数の長方形に分割する考え」として概念を一般化できる。

このことから、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）において、【一般化５－１】を満たす乗法技術は、8100通りのすべての乗法に適用できる乗法技術となることが示された。

（3）【条件２－１】の一般化

３（３）では、２桁の乗法において十の位の数が同じならば、【拡張２－２】を満たす乗法技術を利用して計算できることを示した。この節では、「十の位が同じである」という条件を拡張し、この乗法技術の手続きと概念を【一般化５－２】として一般化する。

【一般化５－２】任意の２数である

〈例５－２〉　26×35

A：計算の手続き

ⅰ）乗数の35を20と15の和に分解する。
　35＝20＋15

ⅱ）被乗数の26とⅰ）で求めた15をたす。
　26＋15＝41

ⅲ）ⅱ）で求めた数に20をかける。
　41×20＝820

ⅳ）被乗数の一の位の６とⅰ）で求めた15をかける。
　6×15＝90

ⅴ）ⅲ）で求めた数とⅳ）で求めた数をたして書く。
　820＋90＝910

B：計算の概念

26×35の長方形を、20×20の正方形と20×15、6×20と6×15の３つの長方形に分割する。そして、20×20の正方形の下側に、6×20と20×15の２つの長方形を合併する。できあがった長方形の面積に残った6×15の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図５－２）。

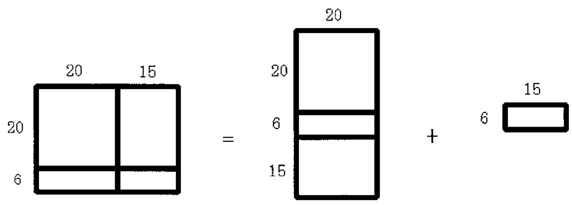

図５－２．26×35の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$26\times35=(20+6)\times(\boxed{20+15})$　（Aⅰ）
$=20\times20+6\times20+20\times15+\boxed{6\times15}$　（Aⅳ）
$=(20+6+15)\times20+6\times15$
$=(\boxed{26+15})\times20+6\times15$　（Aⅱ）
$=\boxed{41\times20}+90$　（Aⅲ）
$=\boxed{820+90}$　（Aⅴ）
$=910$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$(10m+a)\times(10m+10n+b)$
$=10m\times10m+a\times10m+10m\times(10n+b)+a\times(10n+b)$

$=(10m+a+10n+b)\times 10m+a\times(10n+b)$

十の位の数が異なり、乗数の十の位の数が被乗数の十の位の数より大きい場合には、〈例５－２〉のような手続きと概念として一般化できる。また、十の位の数が異なり、乗数の十の位の数が被乗数の十の位の数より小さい場合には、次のような手続きと概念として一般化できる。26×15ならば乗法の交換法則を利用して26×15＝15×26と式を変形し、〈例５－２〉と同様な５つの手続きとして一般化できる。そして、【拡張２－２】を満たす乗法技術の説明で利用した「元の長方形の縦の長さ10m＋aを10mの長さとａの長さに分け、横の長さ10m＋bを10mの長さとｂの長さに分けて、４つの長方形に分割する考え（mは１桁の自然数、ａとｂは０または１桁の自然数）」を、「元の長方形の縦の長さ10m＋aを10mの長さとａの長さに分け、横の長さ10(m＋n)＋bを10mの長さと10n＋bの長さに分けて、４つの長方形に分割する考え（ｍは１桁の自然数、ｎ、ａとｂは０または１桁の自然数）」として概念を一般化できる。

このことから、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）において、【一般化５－２】を満たす乗法技術は、8100通りのすべての乗法に適用できる乗法技術となることが示された。

（4）【条件３－１】の一般化

３（４）では、２桁の乗法において基準数より小さい２数または基準数より大きい２数ならば、【条件３－１】または【拡張３－２】を満たす乗法技術を利用して計算できることを示した。この節では、「基準数より小さい数と大きい数である」という条件を補完し、この乗法技術の手続きと概念を【条件３－１】、【拡張３－２】または【一般化５－３】として一般化する。

【一般化５－３】基準の数より小さい数と大きい数である

〈例５－３〉 19×23

Ａ：計算の手続き

ｉ）被乗数19から基準数20をひく。

$19-20=-1$

ii）乗数23から基準数20をひく。

$23-20=3$

iii）被乗数の19とii）で求めた数をたして基準数20をかける。

$(19+3)\times 20=22\times 20=440$

iv）ｉ）で求めた数とii）で求めた数をかける。

$(-1)\times 3=-3$

ｖ）iii）で求めた数とiv）で求めた数をたして書く。

$440-3=437$

Ｂ：計算の概念

19×23の長方形を、19×20と19×3の２つの長方形に分割する。そして、19×20の長方形の下側に、19×3の長方形を合併する。できあがった凹六角形に3×1の長方形を組み込み、22×20の長方形を構成する。できあがった長方形の面積から組み込んだ3×1の長方形の面積をひくと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図５－３）。

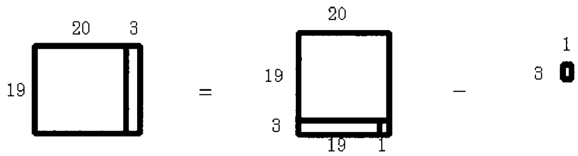

図５－３．19×23の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「Ａ：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$$
\begin{aligned}
19\times 23 &= (\boxed{20-1})\times(\boxed{20+3}) && (\mathrm{A\,i})(\mathrm{A\,ii})\\
&= 20\times 20-1\times 20+3\times 20+\boxed{(-1)\times 3} && (\mathrm{A\,iv})\\
&= (20-1+3)\times 20+(-1)\times 3\\
&= \boxed{(19+3)\times 20}+(-1)\times 3 && (\mathrm{A\,iii})\\
&= 22\times 20-3\\
&= \boxed{440-3} && (\mathrm{A\,v})\\
&= 437
\end{aligned}
$$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。ｘは基準数を表す。

$$
\begin{aligned}
&(x-a)\times(x+b)\\
&\quad= x\times x-a\times x+b\times x+(-a)\times b
\end{aligned}
$$

$=(x-a+b)\times x-a\times b$

被乗数が基準数より小さく、乗数が基準数より大きい場合には、〈例５－３〉のような手続きと概念として一般化できる。また、被乗数が基準数より大きく、乗数が基準数より小さい場合には、次のような手続きと概念として一般化できる。56×19ならば56－20＝36、19－20＝－1、(56－1)×20＝55×20＝1100、36×(－1)＝－36、1100－36＝1064という５つの手続きとして一般化できる。そして、【拡張３－２】を満たす乗法技術の説明で利用した「横の長さが10の倍数になる長方形を構成し、余った長方形の面積をたす考え」を、「横の長さが10の倍数になる長方形を構成し、不足した長方形の面積をひく考え」として条件を補完し、【条件３－１】、【拡張３－２】または【一般化３－３】で場合分けすることによって概念を一般化できる。さらに、基準数が100ならば第３の手続きによる計算の答えで一の位の数と十の位の数が０になるため、次のような６つの手続きで答えを導くことができ、この乗法技術を３桁の乗法にも適用できることがわかる（Bharati, 1992, p.14-16)。104×97ならば104と100との差が＋４で97と100との差が－３であり、斜めに104と－３をたして、垂直に＋４と－３をかける。そして、101から１をひいて（繰り下がり）12と100の差を求めればよいのである。

$$\begin{array}{rr} 104 & +4 \\ \times\ \ 97 & -3 \\ \hline \end{array}$$
$$101/-12=100/88$$

このことから、３（１）で示した２桁の乗法表（表1）において、【条件３－１】、【拡張３－２】または【一般化３－３】を満たす乗法技術は、8100通りのすべての乗法に適用できる乗法技術となることが示された。

（５）【条件４－１】の一般化

３（５）では、２桁の乗法において被乗数または乗数が5の倍数ならば、【拡張4－2】を満たす乗法技術を利用して計算できることを示した。この節では、「被乗数または乗数が５の剰余類である」という条件を補完し、この乗法技術の手続きと概念を【一般化５－４】として一般化する。

【一般化５－４】５の剰余類と任意の数である

〈例５－４〉　26×37

A：計算の手続き

ｉ）被乗数の26を25と１の和に分解する。
　26＝25＋1

ii）ｉ）で求めた１と37をかける。
　1×37＝37

iii）乗数の37を２と（37÷2）の積に分解する。
　37＝2×(37÷2)

iv）ｉ）で求めた25と２をかける。
　25×2＝50

ｖ）iv）で求めた数と乗数の37をかける。
　50×37＝1850

vi）ｖ）で求めた数を２でわる。
　1850÷2＝925

vii）vi）で求めた数とii）で求めた数をたして書く。
　925＋37＝962

B：計算の概念

26×37の長方形を、25×(37÷2)、25×(37÷2)と1×37の３つの長方形に分割する。そして、25×37の長方形の下側に、もう一つ25×37の長方形を合併する。できあがった長方形の縦の長さは25×2＝50(10の倍数）であり、この縦の長さと横の長さの37をかけた長方形の面積は、25×37の長方形の２倍の面積になるため(倍積変形)、２でわると25×37の長方形と同じ面積になる。そして、50×37÷2の長方形の面積（黒網部分）に残った1×37の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図５－４)。

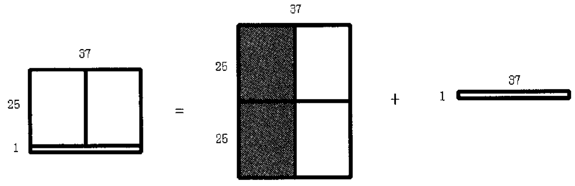

図５－４．26×37の面積図

数の分解と乗法の結合法則を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$$26\times37=(\boxed{25+1})\times37 \quad (\mathrm{A\,i})$$
$$=25\times37+\boxed{1\times37} \quad (\mathrm{A\,ii})$$
$$=25\times\{\boxed{2\times(37\div2)}\}+37 \quad (\mathrm{A\,iii})$$
$$=(\boxed{25\times2})\times37\div2+37 \quad (\mathrm{A\,iv})$$
$$=\boxed{50\times37}\div2+37 \quad (\mathrm{A\,v})$$
$$=\boxed{1850\div2}+37 \quad (\mathrm{A\,vi})$$
$$=\boxed{925+37} \quad (\mathrm{A\,vii})$$
$$=962$$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$$(5m+r)\times\{2\times(n\div2)\}$$
$$=5m\times\{2\times(n\div2)\}+r\times\{2\times(n\div2)\}$$
$$=(5m\times2)\times n\div2+r\times n$$
$$=10mn\div2+r\times n$$
$$=5mn+rn$$

５でわると１余る数と任意の数である場合には、〈例５－４〉のような手続きと概念として一般化できる。すなわち、５でわるとｒ余る数と任意の数である場合には、次のような手続きと概念として一般化できる。$(5m+r)\times n$（mは２以上19以下の自然数、ｒは０以上４以下の整数、ｎは２桁の整数）ならば$r\times n=rn$、$n=2\times(n\div2)$、$5m\times2=10m$、$10m\times n=10mn$、$10mn\div2=5mn$、$5mn+rn$という手続きとして一般化できる。そして、【拡張４－２】を満たす乗法技術の説明で利用した「縦の長さが５の倍数である長方形に変形する考え」を、「縦の長さが５の倍数である長方形と縦の長さが５の剰余である長方形に変形する考え」として概念を一般化できる。

このことから、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）において、【一般化５－４】を満たす乗法技術は、8100通りのすべての乗法に適用できる乗法技術となることが示された。

（6） たすきがけの公式

ベーダ数学において、２桁のすべての乗法に利用できる一般的な乗法技術が紹介されている。そして、この乗法技術の手続きが説明されている。この乗法技術は「アーダバーティリャック規則（Urdhva-Tiryak Sutra）」と呼ばれている。この規則は、ベーダから「Urdhva-Tiryagbhyam」という一文を読み、その意味を解釈すると「垂直に、そして斜めに（Vertically and cross-wise）」になるという（Bharati, 1992, p.33-40）。

ここまでは、ある特定の条件を満たす４種類の乗法技術について、２桁のすべての乗法に適用できるように条件を緩和したり、条件を補完したりしてきた。この節では、２桁のすべての乗法で利用できるアーダバーティリャック規則に基づく乗法技術の手続きと概念を明確化していく。

【一般化５－５】任意の２数である

〈例５－５〉 26×37

A：計算の手続き

ｉ）被乗数の十の位の数と乗数の十の位の数をかけて書く。
　$2\times3=6$

ii）被乗数の十の位の数と乗数の一の位の数をかける。
　$2\times7=14$

iii）被乗数の一の位の数と乗数の十の位の数をかける。
　$6\times3=18$

iv）ii）で求めた数とiii）で求めた数をたしてｉ）で求めた数の右側に書く。
　$14+18=32$

ｖ）被乗数の一の位の数と乗数の一の位の数をかけてiv）で求めた数の右側に書く。
　$6\times7=42$

vi）ｉ）、iv）、ｖ）で求めた数を繰り上がりに留意しながらたす。
　$6+3:2+4:2=962$

$$\begin{array}{r}
2\ \ 6 \\
\times\ \ 3\ \ 7 \\
\hline
6:14+18:42 \\
6+3:2+4:2 \\
9\quad\ 6\quad 2
\end{array}$$

B：計算の概念

26×37の長方形を、20×30、10×7、10×7、6×10、6×10、6×10と6×7の７つの長方形に分割する。そして、7×10の長方形の下側に、7×10、6×10、6×10と6×10の４つの長方形を合併する。20×30の長方形の面積に、この合併によってできた長方形の面積と6×7の長方形の面積をたすと、元の長方形と同じ面積になるという考えを利用している（図５－５)。

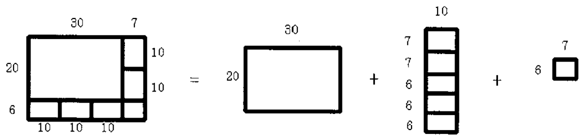

図５－５．26×37の面積図

式の展開と因数分解を利用して、「A：計算の手続き」の各ステップと式の変形を対応させると次のようになる。□で囲まれた部分が、「A：計算の手続き」の各ステップと対応している。

$$\begin{aligned}26\times37 &= (20+6)\times(30+7)\\ &= 20\times30+20\times7+6\times30+\boxed{6\times7} \quad (\mathrm{A\,v})\\ &= (\boxed{2\times3})\times100+2\times7\times10+6\times3\times10+6\times7 \quad (\mathrm{A\,i})\\ &= (2\times3)\times100+(\boxed{2\times7}+\boxed{6\times3})\times10+6\times7 \quad (\mathrm{A\,ii})(\mathrm{A\,iii})\\ &= 6\times100+(\boxed{14+18})\times10+6\times7 \quad (\mathrm{A\,iv})\\ &= 6\times100+32\times10+42\\ &= \boxed{600+320+42} \quad (\mathrm{A\,vi})\\ &= 962\end{aligned}$$

文字式の変形を利用して、上述した式の変形を一般化すると次のようになる。

$$\begin{aligned}&(10a+b)\times(10c+d)\\ &= 10a\times10c+10a\times d+b\times10c+b\times d\\ &= (a\times c)\times100+a\times d\times10+b\times c\times10+b\times d\\ &= (a\times c)\times100+(a\times d+b\times c)\times10+b\times d\end{aligned}$$

このように、$(10a+b)\times(10c+d)$ ならば $a\times c$、$a\times d+b\times c$ と $b\times d$ の答えを求め、これらの答えを繰り上がりに留意しながらたすという手続きとして一般化できる。そして、「元の長方形を $10a\times10c$ の長方形、$(a\times d+b\times c)\times10$ の長方形と $b\times d$ の長方形に分割する考え」を利用して概念を一般化できる。

このことから、３（１）で示した２桁の乗法表（表１）において、【一般化５－５】を満たす乗法技術は、8100通りのすべての乗法に適用できる乗法技術となることが明確化された。

５．結語

本研究の目的は､「インドのベーダ数学(Vedic Mathematics) における２桁の乗法技術を拡張し、２桁のすべての乗法に適用できる技術として一般化できるか」という問いに答えることであった。結論として、「ある特定の条件を満たす４種類の乗法技術について、２桁のすべての乗法に適用できる技術として一般化できる」ということを示した。さらに、２桁のすべての乗法に適用できる１種類の乗法技術について、その概念を明確化した。

本研究の結論は、ベーダ数学における２桁の乗法技術やインド式計算として紹介されている２桁の乗法技術の概念を明確化し、拡張し、一般化したことによって、拡張の考えや一般化の考えを利用して、子どもが数学の概念を形成したり、子どもの数のセンスを伸ばしたりするための教材として利用する可能性を高めた。この点において、本研究の結論は教育的意義を有しているといえる。

注

1）インド大使館.
http://www.embassyofindiajapan.org/index-j.html

2）インド教育研究研修協議会（NCERT).
http://www.ncert.nic.in/welcome1.asp

文　献

1）Bharati Krsna Tirthaji (1992) Vedic Mathematics Revised Edition. India: Montilal Banarsidass Pub.

2）Glover, J.T. (1995) Vedic Mathematics for Schools 1. India: Montilal Banarsidass Pub.

3）Glover, J.T. (1999) Vedic Mathematics for Schools 2. India: Montilal Banarsidass Pub.

4）Kumar, P. (2004) Vedic Mathematics for Intelligent

Guessing. India: New Dawn Press.
5）NCERT（2005）Math Magic Class Ⅳ. India: National Council of Educational Research and Training.
6）カジョリ, F.（1997）復刻版カジョリ初等数学史. 共立出版.
7）片桐重男（1988）数学的な考え方・態度とその指導１. 明治図書.
8）中村亨（2007）インド式計算ドリル. 晋遊舎.
9）高橋清一（2007）インド数学ドリル. 日東書院.