$k(k-1)\cdots 1$-pattern avoiding束の構造について

冨　江　雅　也

1　導 入

本研究の目的は対称群における弱 Bruhat 順序に対し Pattern-Avoiding 制限を課すことにより現れる構造を調べることである。とくに順序構造における基本的な普遍量である Möbius 関数を NBB 基底を用いて計算し、一般変形 Fibonacci 多項式を特殊化した値で記述できることを示す。本論文において主な役割を担うのは、半順序集合上の Möbius 関数および Pattern-Avoiding 制限である。Möbius 関数は 19 世紀中頃、整数論における zeta 関数を研究する過程で導入された。この関数は長方形をねじって対辺を同一視して得られる“Möbius の帯”を発見したドイツ人数学者 Möbius によって導入された量であり自然数における素因数分解から計算される。一方半順序集合は 19 世紀から数学的対象として意識されており、1940 年代、Birkhoff による教科書を皮切りに半順序構造の体系的な研究が始められた[6]。1960 年代、Rota により、Homology 計算、Matroid 理論との関係など半順序構造における Möbius 関数を計算する意義が指摘され、その成果をまとめた論文は半順序構造の研究における基本的文献となると共に Rota の弟子、孫弟子達が代数幾何学、環論および代数的組合せ論など様々な側面から彼の研究を引き継いでいる[20]。

一方で Möbius 関数から導出される Möbius 反転公式はふるいの方法の一般化として知られている。ふるいの方法とは重複を持つ集合族に対して合併集合の大きさを各集合における重なりを考慮して計算する技法である。Möobius 反転公式における目覚ましい応用として超平面配置（n 次元ユークリッド空間に $n-1$ 次元の平面を交叉を許容しつつ並べたもの）における連結成分および有界集合の勘定が知られている[26]。Zaslavsky は超平面配置の問題を有限体における問題に帰着させ、本質的に Möbius 反転公式を用いることにより、上記の数え上げを行った。有限体に帰着させる過程において、超平面配置ではなく対応する交叉束（実際の配置よりもはるかに情報量が少なく扱いも容易である）を考えることにより元の配置の情報を大部分引き出せることが示唆されており非常に興味深い。

与えられた半順序集合に対する Möbius 関数の計算は基本的である半面、困難な場合も多く、さまざまな技術開発がおこなわれている。本論文で利用する NBB 基底もその一例である。この方法は本質的に Rota により考案され Blass-Sagan によって一般化された[8]。NBB 基底とは束における atom に全順序を入れることにより構成される。全順序の入れ方は任意であり、自然な形で導入することにより Möbius 関数の組合せ的記述を期待することができる。

Möbius 関数以外にも、より多くの情報を含む（それゆえより計算が難しい）普遍量として特性多項式、Flag enumerator などが挙げられる。特性多項式とは階層づけられた半順序から計算される 1 変数多項式である。一般に多項式が整数上 1 次式に因数分解することは極めて稀であるが、超平面配置における交叉束から計算される特性多項式においては多くの場合で 1 次式に分解し、さらに根に対する組合せ論的解釈がなされている。準対称多項式は無限変数の多項式である。一般にランク付けされた半順序構造全体は Hopf 代数として積、余積、対合射を定義することができる。同時に準対称多項式も Hopf 代数と捉えることができる。Ehrenborg

は半順序から準対称多項式への Hopf 代数構造を保つ写像を構成し、いくつかの半順序集合族に対して対応する準対称多項式の表示を与えた。双方とも無限次元であるが、Ehrenborg の議論により、大きな Kernel が存在すること、即ちランク付き半順序構造から定まる Hopf 代数は準対称多項式より代数的に大きなことがわかる。それゆえ Flag enumerator は半順序の情報を相当数削っていると考えられる。しかし不思議なことに半順序構造における Chebyshev 変換、超平面配置における交叉束から領域を復元する写像、符号付 Birkhoff 変換等、Flagenumerator の Kernel を保つように準対称多項式における変換を引き起こす例が多くはないもののいくつか知られている[4][10][12][23]。

次に Pattern-Avoiding 制限について述べる。これは後で定義するようにあらかじめ定められた Pattern を排する置換を意味し、その数え上げは Mansour らにより母関数的手法、計算機援用による数値計算により現在急速に発展している。本論文においては数え上げの側面ではなく、弱 Bruhat 順序構造を課したときに現れる半順序を考える。Pattern-Avoiding と弱 Bruhat 順序構造の間に現れるもっとも興味深い対象は Tamari Lattice と呼ばれるものである。Tamari Lattice とは 132-avoiding permutation より誘導される半順序構造であり、幾何学的視点からは結合多面体の 1-skelton という別の特徴付けをもつ[27]。（置換多面体をある種縮合して得られるものでもある）また Binarytree における flip を用いても同様の半順序を構成することができる。代数的組合せ論においては Loday-Ronco ホップ代数の自然な基底としても現れており[16]、代数学、幾何学における組合せ的側面に位置する重要な対象であると同時に様々な一般化も考察されている。ここでは Reading による Cambrian lattice を一つ挙げておく[18]。本論文は 321-avoiding permutation を弱 Bruhat 順序に制限した束構造に対する考察[25]を $k(k-1)\cdots 1$-pattern avoiding permutation まで一般化したものである。

2 準 備

本章では、議論に際し必要となる定義および定理を述べる。

2.1 半順序集合

本論文において基本的となる半順序集合とは以下で定義されるものである[22]。

定義 2.1. 集合 P に対して関係≤が以下の条件を満たすとき（P, ≤）のペアを半順序集合という。

1. すべての $x \in P$ に対して $x \leq x$
2. $x, y \in P$ に対して $x \leq y, y \leq x$ ならば $x=y$
3. $x, y, z \in \mathrm{P}$ に対して $x \leq y,\ y \leq z$ ならば $x \leq z$

特に≤を略して半順序集合 P と書くことにする。

自然数、整数などに入る大小関係は半順序集合の特殊な例であり全順序集合と呼ばれている。組合せ論的見地からすると全順序集合より半順序集合の方が構造が複雑な分面白い対象である。次に束と呼ばれるクラスを紹介する[22]。

定義 2. 2. 半順序集合 L が束であるとは L における任意元 x, y に対して $x \leq z$ かつ $y \leq z$ となる元 z の中で最小であるものが存在して、なおかつ $x \leq w$ かつ $y \leq w$ となる元 w の中で最大であるものが存在する時をいう。

束もさらに、超平面配置における交叉束、Matroid 理論とつながりを持つ幾何学束、join と meet があたかも代数演算の分配法則を満たすようなふるまいをする分配束、群論に起源をもつ supersolvable 束など様々なものがあるがここでは深入りしない。

もっとも上の定義はあまりにも一般的でありまた闇雲に半順序集合、束を定義してもあまり面白い議論は期待できない。半順序集合および束それ自体を研究するよりも他分野の研究対象に由来する半順序集合、束を考察する方が研究しやすいと思われる。

次に半順序集合および束の典型的な例をいくつか紹介する。

具体例 2. 1.

1. 自然数における大小関係から定まる順序を$\mathbb{N}_p$で表す。これは全順序集合となる。
2. $\{1, 2, ..., n\}$における部分集合全体に対し、大小関係$X \leq Y$を$X \subset Y$により定めたものを考える。包含関係から誘導されるこの半順序を *Boole* 代数といいB_nと表す。*Boole* 代数において被覆関係を図式化した *Hasse* 図は超立方体における辺のつながり方と一致する。もっとも基本的な凸多面体に由来をもつ半順序（じつは束）である。
3. 自然数の集合$\mathbb{N}$に対してyがxで割り切れるとき$x \leq y$と定めたもの。これを$D_{\mathbb{N}}$と表す。*Möbius* 関数は初め$D_{\mathbb{N}}$に対してのみ定義されていた。束の構造を持ち、どのような区間をとっても有限鎖の直積と同型になる。
4. 集合$\{1, 2, ..., n\}$における分割全体に細分で順序を入れたもの。これをΠnと表す。A型ルート系から定まる超平面配置の交叉束として有名であり束構造をもつ。
5. 集合$\{1, 2, ..., n\}$を等間隔時計回りに円周上に配置しお互いの凸閉包が交わらないような分割全体に細分で順序を入れたもの。これを$NC(n)$で表す。対称群に *absolute* 順序を定義したときに現れる半順序であり束構造をもつ。
6. *Bruhat* 順序。これは$SL(n, \mathbb{C})$を *Bruhat* 分解したとき、各成分の隣接関係をグラフ化したものである。束構造は持たない。これをWnで表す。

とくに基本的な量である Möbius 関数を紹介する。

定義 2. 3. 半順序集合 P に対して以下の条件を満たす関数$\mu : P \times P \to \mathbb{Z}$はただ一つ存在して、特に *Möbius* 関数という。

1. xとyに大小関係がないときは$\mu(x, y)=0$
2. $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z)=\delta_{x, y}$

ただし$\delta x, y$はクロネッカーのデルタ、即ちxとyが等しければ1、それ以外では0を表すものとする。

とくにPに最大元$\hat{1}$、最小元$\hat{0}$が存在するとき$\mu([\hat{0}, \hat{1}])$をPの Möbius 関数と呼ぶ場合もあり$\mu(P)$と表記する。

先に挙げた例に対して Möbius 関数は以下のようになる。

具体例 2. 2.

1. $\mathbb{N}_p$における *Möbius* 関数は$n=m+1$ならば$\mu([m, n])=-1$, それ以外は$\mu([m, n])=0$
2. 集合$\{1, 2, ..., n\}$上の *Boole* 代数B_nの *Möbius* 関数は$\mu(B_n)=(-1)^n$
3. $D_{\mathbb{N}}$においてxがyの約数であるとき$\frac{y}{x}$を素因数分解したときすべて異なる r 個の素数の積になっていたら$\mu([x, y])=(-1)^r$となり、それ以外では$\mu([x, y])=0$
4. $\mu(\Pi_n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$
5. $\mu(NC(n)) =(-1)^n \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
6. $\mu(\mathrm{W}_n)=(-1)^n$

初等整数論における Möbius 関数は先の具体例において自然数に約数関係を用いて定義した半順序集合における Möbius 関数そのものである。また有限集合族において各集合が重複を持つとき、重なりの情報から合併集合の大きさを図るふるいの方法と呼ばれるものは Boole 代数における Möbius 関数が本質的役割を果たす。これは Möbius 反転公式とよばれており古典的な事実として有名である。

2. 2　束における NBB 基底

束Lは定義より最小元$\hat{0}$および最大元$\hat{1}$をもつ。本節では$\mu([\hat{0}, \hat{1}])=\mu(L)$を NBB 基底を用いて計算する方法を紹介する。NBB 基底は束の Möbius 関数を計算するうえで非常に強力な道具となる。この手法は Rota により考案され、Blass-Sagan により一般化された。本節の内容は Blass-Sagan の論文[8]に基づく。

束Lにおいて$\mathrm{ATM}(L) := \{x \in L | \hat{0} < x\}$を atom の集合として、$\mathrm{ATM}(L)$に対して全順序$\lhd$を入れたものを考える。

定義 2.4. *atom* の集合$X \subset \mathrm{ATM}(L)$が *BB*（*Bounded Below* の略）であるとは$a \in \mathrm{ATM}(L) \setminus X$, $a \leq \vee X$が存在して、すべての$\mathrm{x} \in X$

に対して $a \lhd x$ が成立するときをいう。

BB集合を用いてNBB基底を以下で定義する。

定義 2.5. $X \subset \mathrm{ATM}(L)$ が *NBB* 基底であるとは、X の如何なる部分集合 Y に対しても Y が *BB* とならないときをいう。

以下の結果は Möbius 関数を計算する上で非常に強力であり、特殊なケースにおいては組合せ的表示を与える点で興味深い。

定理 2.1. 束 L において
$\mu(L)=\mu([\hat{0}, \hat{1}])=\sum_{X:\mathrm{NBB}, \vee X=\hat{1}}(-1)^{\#X}$
が成立する。

余談 2. 1. *Blass-Sagan* の論文では束の場合だけ扱っている。しかし証明を精査すると *atom* が *join* を持つ半順序集合においても同様の定理が成立する事がわかる。とはいえ拡張に伴う面白い例が現段階では見あたらない。

前述の特殊な場合として Noncrossing Partition があげられる。上記の定理より、Noncrossing Spanning Tree の数え上げに帰着され符号を除き Möbius 関数は Catalan 数となる。また弱 Bruhat 順序において Möbius 関数の値は一般に $\{-1, 0, 1\}$ のいずれかになるが、正確な値を Coxeter 元の言葉で記述することができる。他の応用としては幾何学束において具体的にラベリングを与えるアルゴリズムが NBB 基底の言葉を用いて与えられている。

2. 3 Pattern Avoiding Permutations

本節ではPattern Avoiding制限を導入する。集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ における置換（permutation）σ を $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ と表記する。このような置換全体を S_n と表記する。たとえば S_3 の置換は 123, 132, 213, 231, 312, 321 の 6 個である。一般に S_nにおける置換の総数は $n!$ で与えられる。今 $\tau \in S_n$ が $\pi \in S_k$ のパターンを含んでいるとは τ の部分列 $\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_k)$, $(1 \leq i_1<i_2<\cdots<i_k \leq n)$ が存在してその大小関係が π と等しくなるという時をいう。たとえば $\tau=84517623 \in S_8$ は $\pi=312$ パターンを含んでいることになる。なぜならば部分列 $\tau(3)\tau(4)\tau(7)=512$ における大小関係はちょうど 312 となっているからである。

定義 2. 6. 自然数 n, k において置換 $\sigma \in S_n$ および $\pi \in S_k$ において σ が π-*avoiding permutation* であるとは $\pi \in S_k$ のパターンを含んでいない場合をいう。

$k=3$ のときが最も基本的であり以下の定理が知られている[14][15]。

定理 2.2. $\pi \in S_3$ を一つ固定する。このとき S_n の元で π-*avoiding permutation* となるものは $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ となる。

$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ は Catalan 数とよばれ代数的組合せ論をはじめ数学のいたる所に現れる重要な数である。Catalan 数で数え上げられる対象は Catalan objects とよばれ現在 180 ほど知られている。特に Lattice Path との全単射対応に関しては Claesson および Kitaev の論文に多くの具体例とともにまとめられている。とくに彼らは置換における重さ（desent, peak, valley, inversion, etc）および Lattice Path における重さ（area statistic およびその類似）を引き合いに出し、綺麗な全単射は対象間の重さを保つ写像であると規定して、過去の膨大な結果を分類している[2][5][9][11][17][19][21]。

余談 2.2. 置換を視覚的に表現する方法の一つとして阿弥陀くじが知られている。同じ置換を表す阿弥陀くじにおいて横線の本数が最小であるもの、つまりもっとも簡潔な表示法が幾通りもあることはよく知られている。じつは置換が 321-*avoiding* である時に限り横線の本数が最小である阿弥陀くじが一意に定まることが知られている[24]。

余談 2. 3. 対称群と *Catalan* 数のつながりを示唆する事象は 3-*length-pattern avoiding permutation* の個数が *Catalan* 数で与えられること以外にも多く知られている。（例えば対称群に付随する A 型ルート系から定まる *Shi* 配置

や *Noncrossing Partition* など）一方で *Catalan* 数は対称群の *degree* をつかって記述される。それゆえ対称群をより一般化した *Coxeter* 群というクラスに対してやはり *degree* を用いて *Catalan* 数の拡張を形式的に定義することができる。とくに *Coxeter–Catalan* 数と呼ばれ、この拡張は形式的であるが豊富な具体例を伴うものである。近年 *Coxeter* 群に由来を持ち *Coxeter–Catalan* 数で数え上げられる対象が多く発見された。*Coxeter–Catalan Combinatorics* とよばれる一連の研究は、超平面配置、*Lattice Path*、数え上げ組合せ論、代数的組合せ論、表現論を巻き込んで急速に発展しつつある。中心的対象の一つが *Noncrossing Partition* と呼ばれる初等的な対象である。1970年代 *Kreweras* により研究が始まり、20世紀末には *Coxeter* 群を用いた群論的構成法が提案され、先の *Coxeter–Catalan* 数で数え上げられることが示された。*Coxeter* 群は幾何学的に良い性質を持つ対象であり、*Coxeter* 群の一般化として知られる複素鏡映群への拡張を含めてしばらく *Coxeter–Catalan* 数の周辺で多くの研究が進められることになるだろう[1][7][13]。

3　本論

本章では初めに一般変形 Fibonacci 多項式を定めて、組合せ的な意味を見る。一般変形 Fibonacci 多項式（より広く重み付き関数）から自然な半順序における濃度と Möbius 関数を導出できれば面白いのであるが、今のところ知る限りうまくいった例は以下の定理だけである[3][25]。

定理 3. 1.　S_n における 123–213–132-*avoiding-permutation* 全体の個数はは変形 *Fibonacci* 多項式列 $\{f_n(q)\}$ において $q=1$ としたときの値に等しい。また $q=-1$ によって対応する弱 *Bruhat* 順序における *Möbius* 関数を得る。

この結果は個数→ $q=1$、Möbius 関数→ $q=-1$ の対応を述べている。次の結果と併せてみると妥当な主張であると考えられる[22]。（両者の間に直接的な関係はない）

定理 3.2.　最小元 $\hat{0}$ および最大元 $\hat{1}$ を持つ半順序集合 P における *Möbius* 関数 $\mu(P)$ の値は $\hat{0}$ を始点、$\hat{1}$ を終点とする *chain* 全体に対して、長さが偶数の *chain* に対しては 1、長さが奇数であるときは -1 の重みを付けて足し上げた値に等しい。

実際に個数は集合の各元に対して 1 の重さを与えてカウントしたものであるし、Möbius 関数は対応する順序複体における Euler 標数（各次元における面の交代和）であるので、交代和の意味で -1 の冪乗が現れる点は自然である。

本論文では以下の定理の一般化を試みる[25]。

定理 3. 3.　S_n における 321-*avoiding permutation* 全体に弱ブリュア順序を入れたときの *Möbius* 関数は変形 *Fibonacci* 多項式列 $\{f_n(q)\}$ において $q=-1$ としたときの値に等しい。

残念ながら $q=1$ としても半順序集合の元の個数にはならない。故に Möbius 関数にだけ注目して以下の結果を得た。

定理 3. 4.　一般変形 *Fibonacci* 多項式 $q^{k-1}f^{\,k}_{n-k-1}(q)$ において $q=-1$ とすることにより $S_n(k(k-1)\cdots1)$ における *Möbius* 関数を得る。

3. 1　重み付き一般 Fibonacci 数

この節において Fibonacci 数を 1: 重さ関数、2: 再帰式、二つの視点から一般化する。Fibonacci 数列 $\{f_n\}$ とは $f_0=1, f_1=2, f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ で特徴づけられる数列である。（多くの文献においては $f_0=1, f_1=1$, とあるが、本論文においては議論の都合上このように定める。）Fibonacci 数列を用いて数え上げられる対象は数多あるがとくに、

集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ における部分集合で、連続する整数を含まないような部分集合（これを Sparse 集合という）は f_n 通り存在する。

という事実に着目する[22]。今変形 Fibonacci 多項式を形式的に以下で定める。

定義 3. 1.　変形 *Fibonacci* 多項式列 $\{f_n(q)\}$ を、

1. $f_0(q)=1, f_1(q)=1+q$

2. $f_n(q)=f_{n-1}(q)+qf_{n-2}(q)$

と定める。

このとき $f_2(q)=1+2q$, $f_3(q)=1+3q+q^2$ となる。一方で本来の Fibonacci 多項式における漸化式は $f_n(q)=qf_{n-1}(q)+f_{n-2}(q)$ であり我々が定める式と若干異なる[22]。それゆえ便宜上変形 Fibonacci 多項式と呼ぶことにする。

変形 Fibonacci 多項式を組合せ的に解釈するために重み関数を定義する[22]。

定義 3. 2. $\{1, 2, \dots, N\}$ における部分集合族 P に対して

$$wt(\mathrm{P}):=\sum_{\mathrm{X}\in\mathrm{P}}q^{|X|}$$

と定める。この関数を重み関数という。

先ほど定めた変形 Fibonacci 多項式を重み関数で表現した以下の命題が知られている[22]。

命題 3. 1. P_n を $\{1, 2, \dots n\}$ における *Sparse* 集合を集めた部分集合族とする。このとき

$$f_n(q)=wt(\mathrm{P}_n)$$

となる。

Proof. 初めに $\mathrm{P}_0=\{\phi\}$, $\mathrm{P}_1=\{\phi,\{1\}\}$, $\mathrm{P}_2=\{\phi,\{1\},\{2\}\}$ である。ゆえに $wt(\mathrm{P}_0)=1=f_0(q)$, $wt(\mathrm{P}_1)=1+q=f_1(q)$, $wt(\mathrm{P}_2)=2+q=f_0(q)$ となり $f_n(q)=wt(\mathrm{P}_n)$ は $n\leq 2$ で成立する。

今

1. A_n を P_n の部分集合族で n を含まないようなもの。

2. B_n を P_n の部分集合族で n を含むもの。

と定める。明らかに

$$wt(\mathrm{A}_n)+wt(\mathrm{B}_n)=wt(\mathrm{P}_n)$$

今集合族 A_n と P_{n-2} の間には P_{n-2} に属する集合に対して n を加えるという操作によって一対一対応がある。ゆえに

$$wt(\mathrm{A}_n)=qwt(\mathrm{P}_{n-2})$$

一方集合族 B_n においても集合族 P_{n-1} とのあいだに自然な一対一対応がある。ゆえに

$$wt(\mathrm{B}_n)=wt(\mathrm{P}_{n-1})$$

となる。即ち

$$wt(\mathrm{P}_{n-1})=wt(\mathrm{A}_n)+wt(\mathrm{B}_n)=wt(\mathrm{P}_{n-1})+q\cdot wt(\mathrm{P}_{n-2})$$

すなわち変形 Fibonacci 多項式は重さ関数として Fibonacci 数列の一般化ととらえることができる。

次に再帰式の観点から一般化を試みる。k-Fibonacci 数列を

1. $f^k_0=1, f^k_1=2, f^k_2=4, \dots f^k_{k-1}=2^{k-1}$

2. $f^k_n=f^k_{n-1}+f^k_{n-2}+\dots+f^k_{n-1}$

で定める。とくに $k=2$ のとき Fibonacci 数列が復元される。$k=3$ の時は Toribonacci 数列と呼ばれいくつかの文献で取り上げられているようである。k-Fibonacci 数列を取り上げられている文献を見つけることはできなかったがおそらく既知のものであると考えられる。先ほど紹介した sparse 集合の一般化として

集合 $\{1, 2, \dots, \mathrm{n}\}$ における部分集合で、k 個の連続する整数を含まないようなもの

を考える。このような集合を sparse 集合に対する一般化としてにおける *k-sparse* 集合と呼ぶ。

命題 3. 2. 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ における *k-sparse* 集合の個数は f^k_n となる。

証明は本質的に $k=2$ の時と同じであるので省く。さて、重み付き関数の観点から $f_n(q)$ を、再帰式の側面から f^k_n を定めた。次に $f_n(q)$ および f^k_n を踏まえて多項式 $\{f^k_n(q)\}$ を以下で定める。

1. $f^k_i(q)=(1+q)^i$, for $0\leq i\leq k-1$

2. $f^k_n(q)=\sum^k_{i=1}q^{i-1}f^k_{n-1}(q)$

とくに $q\to 1$ として k-Fibonacci 数を、$k\to 1$ によって変形 Fibonacci 多項式を復元する。

命題 3. 3. $\mathrm{P}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{n}}$ を $\{1, 2, \dots n\}$ における k-sparse 集合としたとき

$$f^k_n(q)=\sum_{\mathrm{X}\in q\mathrm{P}^k_n}q^{\#\mathrm{X}}$$

となる。

Proof. $0\leq \mathrm{i}\leq k-1$ の時 $\{1, 2, \dots i\}$ においては、どのような部分集合も k-sparse になる。ゆえに冪集合における重み付き関数を考えればよく $wt(\mathrm{P}^k_i)=(1+q)^i$ になる。ゆえに $0\leq i\leq k-1$ では成立する。今

1. $\mathrm{A}^k_{(n-1)}$ を P^k_n における n を含まないような部分集合族

2. $\mathrm{A}^k_{(n-2)}$ を P^k_n における n を含み、$n-1$ を含まないような部分集合族

3. $A^k_{(n-k+1)}$ を P^k_n における $(n-k+3), \ldots (n-1)$, n を含み、$n-k+2$ を含まないような部分集合族。

と定める。$A^k_{(n-1)}$ は $P^k_{(n-1)}$ の部分集合族との間に自然な一対一対応がある。つまり

$$wt(A^k_{(n-1)})=wt(P^k_{(n-1)})$$

また $A^k_{(n-2)}$ は部分集合族 $P^k_{(n-2)}$ との間に n を付け加えることによる一対一対応がある。つまり

$$wt(A^k_{(n-2)})=q \cdot wt(P^k_{(n-2)})$$

同様にして $1 \leq i \leq k$ $A^k_{(n-1)}$ と部分集合族 $P^k_{(n-1)}$ の間には $(n-i+2), \ldots (n-1)$, n を加えることによる一対一対応がある。つまり

$$wt(A^k_{(n-i)})=qi^{-1} \cdot wt(P^k_{(n-1)})$$

以上の議論より

$wt(P^k_n)=\sum_{1 \leq i \leq k} wt(A^k_{(n-i)})=\sum_{1 \leq i \leq k} q^{i-1} \cdot wt\,(P^k_{n-1})$

を得る。よって求める結論を得る。

3. 2　$k(k-1)\cdots1$-avoiding permutation について

S_n を弱 Bruhat 順序を込めた n 次対称群とする。このとき S_n は束の構造を持つことが知られている。$S_n(k(k-1)\cdots1)$ で S_n における $k(k-1)\cdots1$-avoiding permutation の集合を表す。

補題 3. 1.　$S_n(k(k-1)\cdots1)$ は S_n の *lower ideal* となる。とくに束となる。

Proof. 弱 Bruhat 順序における被覆関係 $\sigma < \tau$ において σ において $k(k-1)\cdots1$-pattern があれば、τ も $k(k-1)\cdots1$-pattern を含むことが分かる。即ち $k(k-1)\cdots1$-pattern を含む置換の集合は upper ideal となる故、補集合である $k(k-1)\cdots1$-avoiding permutation は lower ideal となる。

$S_n(k(k-1\cdots1)$ における join の特徴的な性質を述べる。

補題 3. 2.　$\vee\{\sigma_i, \sigma_i+_1, \ldots\sigma_i+_p\}=\hat{1} \Longleftrightarrow p \leq k-2$

Proof. 証明の概略を述べる。$\vee\{\sigma_i, \sigma_i+_1, \ldots\sigma_i+_p\}$ $=1\ldots i-1i+p+1, i+p, \ldots ii+p+2\ldots n$ となり $p \leq k-3$ ならば $k(k-1)\cdots1$-pattern を持たない。それゆえ $S_n(k(k-1)\cdots1)$ における最大限 $\hat{1}$ とならない。逆に $p \leq k-2$ ならば $k(k-1)\cdots1$-pattern を持つこととなる。

$S_n(k(k-1)\cdots1)$ における atom の集合 $ATM(S_n(k(k-1)\cdots1))=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\sigma_{n-1}\}$（但し $\sigma_i=(i, i+1)$）に全順序 $\lhd$ を

$$\sigma_1 \lhd \sigma_2 \lhd \cdots \lhd \sigma_{n-1}$$

で定める $\lhd$ に基づいて NBB 基底の形を決める。

命題 3. 4.　*atom* の集合 $\{\sigma_{i1}, \sigma_{i1+1}, \ldots\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i2+1}, \ldots\sigma_{j2}, \ldots\sigma_{ip}, \sigma_{ip+1}, \ldots\sigma_{jp}\}$ が *join* をとれば $\hat{1}$ となる *NBB* 基底である。（但し $1 \leq i_1 \leq j_1 < i_2 \leq j_2 < \cdots \leq i_p \leq j_p \leq n-1, j_l-i_{l+1} \geq 2$ for $1 \leq l \leq p-1$）
$\Longleftrightarrow$
$(i_1, i_2, \ldots, j_1) = (1, 2, \ldots k-1)$ かつ $j_2-i_2 \leq k-3, j_3-i_3 \leq k-3, \ldots j_p-i_p \leq k-3$

Proof. 証明の概略を述べる。

atom の集合を記述する際に連続している箇所、そうでない所を明瞭にするために

$$\{\sigma_{i1}, \sigma_{i1+1}, \ldots\sigma_{j1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i2+1}, \ldots\sigma_{j2}, \ldots\sigma_{ip}, \sigma_{ip+1}, \ldots\sigma_{jp}\}$$

と一般性を失わない形で置くことができる。（但し $1 \leq i_1 \leq j_1 < i_2 \leq j_2 < \cdots \leq i_p \leq j_p \leq n-1$, $j_l-i_{l+1} \geq 2$ for $1 \leq l \leq p-1$）

このとき $\vee\{\sigma_{i1}, \sigma_{i1+1}, \ldots\sigma_{j1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i2+1}, \ldots\sigma_{j2}, \ldots\sigma_{ip}, \sigma_{ip}+1, \ldots\sigma_{jp}\}$ は対称群 S_{n-1} の元として $c((i_1, i_1+1), (i_1+1, i_1+2), \ldots, (j_1, j_1+1)) \cdot c((i_2, i_2+1), (i_2+1, i_2+2), \ldots, (j_2, j_2+1)) \cdot \ldots c((i_p, i_p+1), (i_p+1, i_p+2), \ldots, (j_p, j_p+1))$ となる。ただし $c(X)$ で互換の集合 X が生成する部分群における最長元を表すものとする。join をとれば $\hat{1}$ となるので、$j_1-i_1, j_2-i_2, \ldots j_p-i_p$ のうち少なくとも一つは $k-2$ 以上となる。今ある $1 \leq q \leq p$ に対して $j_q-i_q \geq k-2$ と仮定してさらに $j_q-i_q>k-2$ であるとする。このとき $\vee\{\sigma_{iq+1}, \sigma_{iq+2}, \ldots\sigma_{jq}\}$ は $k(k-1)\cdots1$-pattern を持つので join は $\hat{1}$ となり、かつ $\sigma_{iq}<\hat{1}$ より NBB 基底であるためには $j_q-i_q \geq k-1$ となることはできない。よって $j_q-i_q=k-2$ となる。

次に $1 \leq r \leq s \leq p$ に対して $j_r-i_r=j_s-i_s=k-2$ であるとき、$\vee\{\sigma_{is}, \sigma_{is+1}, \ldots\sigma_{js}\}=\hat{1}$ かつ $\sigma_{ir}<\hat{1}$ より NBB 基底であるためには $j_r-i_r=j_s-i_s=k-2$ ならば $r=s$ でなくてはならない。

まとめると $1 \leq t \leq p$ について $j_t - i_t \leq k-2$ であり、$j_u - i_u = k-2$ となる u がただ一つ存在する。一方で $\sigma_1 < \hat{1}$ より $u=1$ の場合のみ NBB 基底となる。

命題3. 5. $wt(\{X| \vee X = \hat{1}, X : \mathrm{NBB}\}) = q^{k-1} f^{k}_{n-k-1}(q)$

Proof. Sn において X が $\vee X = \hat{1}$ となる NBB 基底であることは

$X = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{k-1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i2+1}, \ldots \sigma_{j2}, \ldots \sigma_{ip}, \sigma_{ip+1}, \ldots \sigma_{jp}\}$（但し $j_2 - i_2 \leq k-3,\ j_3 - i_3 \leq k-3,\ \ldots j_p - i_p \leq k-3$）という表示を持つ時である。このとき

$\sum_{X \subset \{1, 2, \ldots n-1\} : \mathrm{NBB},\ \vee X = \hat{1}} q^{|X|}$ の値は $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{k-1}\} \subset X$ に着目して、$q^{k-1} \sum_{Y : k-\mathrm{sparse\ in}\{1, 2, \ldots n-k-1\}}$ となる。

これらの結果を併せて

定理3.5. 一般変形 *Fibonacci* 多項式 $q^{k-1} f^{k}_{n-k-1}(q)$ において $q=-1$ とすることにより $S_n(k(k-1)\cdots 1)$ における *Möbius* 関数を得る。

4　これからの研究課題

これまでの議論より派生する問題をいくつか述べる。

4. 1　$S_n(k(k-1)\cdots 1)$ における普遍量の計算

本論文において $S_n(k(k-1)\cdots 1)$ のメビウス関数を計算し、結論として一般化された変形 Fibonacci 多項式の特殊化で記述できる事を見た。しかしながら $S_n(k(k-1)\cdots 1)$ におけるさらに詳しい束構造に関してはあまり知られていないようである。$S_n(k(k-1)\cdots 1)$ は階層付け不可能であるが、近年階層構造を仮定しない半順序に対して R-labeling が拡張されている点を受けて以下の問題が考えられる。

問題4. 1. $S_n(k(k-1)\cdots 1)$ に *R-labeling* を構成できるか。とくに $S_n(k(k-1)\cdots 1)$ は *shellable* であるか。

4. 2　弱 Bruhat 順序に制限を加えることに伴う半順序構造

$S_n(k(k-1)\cdots 1)$ は弱 Bruhat 順序に $k(k-1)\cdots 1$-pattern avoiding 制限を加えることにより得られる。一方 132-avoiding 制限により Tamari Lattice を構成することができる。Tamari Lattice に関しては Reading による Cambrian Lattice まで一般化されている[18]。Cambrian Lattice は Coxeter 群の生成系を用いて定義されており、pattern-avoiding の観点から同様のものを構成できれば面白いと考えるがどのように手を付けてよいのかわからないのが現状である。

4. 3　Statistics 的側面

対称群における q-statistics は置換の元に対して descent, peak, inversion などなど様々なバリエーションが考えられており、Pattern-Avoiding 制限を課すことにより対象とする集合の濃度を一般化した値をとる[9]。NBB 基底を用いた q-statistics は置換の元ではなく atom を利用して定義した点がこれまでのものと異なり、また一般変形 Fibonacci 多項式というある種素性が良さげな対象が出てきた点を含めてさらに検討していきたい。もちろん通常の q-statistics と異なり集合の濃度は期待できないが、NBB 基底の定義より $q=-1$ において Möbius 関数を復元する。以上を踏まえて以下の問題が考えられる。

問題4. 2. *atom* を用いて定義した *q-statistics* はいかなる情報を含んでいるか？

この問題は正確に定式化されておらず更なる具体例の計算が必要である。

REFERENCE

[1] D. Armstrong, Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups, Mem. Amer. Math. Soc. 202 (2009), no.949.

[2] J. Bandlow and K. Killpatrick, An Area-to-Inv Bijection Between Dyck Path and 312-avoiding Permutations. Electron. J. Combin. 8 (2001), no.1, Research Paper 40, 16pp. (electronic)

[3] E. Barcucci, A. Bernini, M. Poneti, From Fibonacci to Catalan permutations, Pure. Math. Appl. 17, (2006) 1-17.

[4] L. Billera, R. Ehernborg, M. Readdy, The c . 2d index of oriented matroids, J. of Combin. Theory. Ser. A, 80, (1997), 79-105.

[5] S. Billey, W. Jockusch, R. Stanley, Some combinatorial properties of Schubert polynomials, J. Algebraic Combinatorics. 2 (1993), no. 4, 345-374

[6] G. Birkhoff, Lattice Theory, 3ed ed, American Math. Soc, Providence, RI, 1967.

[7] A. Björner, F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, Springer- Verlag, New York, 1991.

[8] A. Blass, B. Sagan, Möbius functions of lattices, Adv. Math. 127,(1997), 94-123.

[9] A. Claesson and S. Kitaev, Classification of bijections between 321and 132-avoiding permutations. Sem. Lothar. Combin. 60 (2008), Art. B60d, 30pp.

[10] R. Ehrenborg, On posets and Hopf algebras, Adv. Math. 119, (1996), 1-25.

[11] E. Deutsch and E. Elizalde, A simple and unusual bijection for Dyck paths and its consequences, Ann. Combin. 7 (2003), 281-297.

[12] S. Hsiao, A signed analog of the Birkhoff transform, J. of Combin. theory. Ser. A, 113, (2006), 251-272.

[13] J. E. Humphleys, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990)

[14] D. Knuth, The art of computer programming, I : Fundamental algorithms. Addison-Wesley, Publishing Co, Reading, Mass-London-Don Mills, Ont, 1969

[15] D. Knuth, The art of computer programming, III : Sorting and searching, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.

[16] J. Loday, M. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math. 139 (1998), 293-309.

[17] T. Mansour, E. Deng and R. DU, Dyck paths and restricted permutations, Discrete Appl. Math. 154 (2006), 1593-605.

[18] N. Reading, Cambrian lattices, Adv. Math, 205, (2006), no2, 313353.

[19] A. Reifegerste, A generalization of Simion-Schmidt' s bijection for restricted permutations, Electron. J. Combin. 9 (2) (2002), paper R14, 9pp. (electronic)

[20] G. Rota, On the foundations of combinatorial theory I, Theory of Möbius functions, A. Wahrscheinlichkeitstheorie 2 (1964), 340-368.

[21] D. Rotem, On a correspondence between binary trees and a certain type of permutations, Information processing letters 4 (1975), 58-61.

[22] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[23] J. Stembridge, Enriched P -partitions, Trans. Amer. Math. Soc 349, (1997), 763-788.

[24] J. Stembridge, Minuscule Elements of Weyl Groups, J. Algebra 235, no.2, (2001), 722-743.

[25] M. Tomie, NBB bases of some pattern avoiding lattices, arXiv :0912.4560, submitted

[26] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements : face-count formulas for partitions of space by hyperplanes, Mem. Amer. Math. Soc. 1 (1975)

[27] G. Ziegler, Lectures on Polytopes, Springer.Verlag, New York, 1995.